

Prirodno-matematički fakultet  
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2019

Takmičenje iz MATEMATIKE  
za III razred srednje škole

1. Neka je  $ABC$  jednakokraki trougao takav da  $|AC| = |BC|$ . Upisani krug sa centrom u  $I$  dodiruje stranicu  $BC$  u tački  $D$  i stranicu  $AC$  u tački  $E$ . Tačka presjeka  $AD$  i  $BE$  je  $S$ . Tačka presjeka  $AD$  s upisanim krugom je  $P (\neq D)$ .
  - a) Dokazati da su tačke  $C, I$  i  $S$  na istoj pravoj.
  - b) Dokazati da tačke  $P, I, S$  i  $E$  leže na istom krugu.
2. Međunarodnoj konferenciji prisustvuju po dva predstavnika iz 27 zemalja. Dokazati da se učesnici konferencije ne mogu poredati za okruglim stolom tako da između svake dvojice učesnika, koji predstavljaju istu zemlju, sjedi tačno 9 drugih učesnika konferencije.
3. Neka su  $x$  i  $y$  realni brojevi takvi da  $(x+1)(y+2) = 8$ . Dokazati da je  $(xy-10)^2 \geq 64$  i odrediti sve realne brojeve za koje važi jednakost.
4. Neka je  $\log_{4a}(40\sqrt{3}) = \log_{3a}(45)$ . Dokazati da je  $a^3$  cijeli broj i odrediti ga.

**Vrijeme rada: 180 minuta.**

**Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.**

**Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.**