

Prirodno-matematički fakultet  
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

**OLIMPIJADA ZNANJA 2019**

Takmičenje iz MATEMATIKE  
za II razred srednje škole

1. Pokazati da ne postoje cijeli brojevi  $x$  i  $y$  tako da važi

$$3x^2 + y^2 = 777777.$$

2. Neka su  $a$  i  $b$  pozitivni realni brojevi takvi da je  $a + b = 1$ . Dokazati da je

$$2 < \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b - \frac{1}{b}\right) \leq \frac{9}{4}.$$

Kada važi jednakost?

3. Oko konveksnog petougla  $ABCDE$  takvog da je  $|AB| = |BD|$  je opisan krug. Tačka  $P$  je presjek dijagonala  $AC$  i  $BE$ . Prave određene dužima  $BC$  i  $DE$  se sijeku u tački  $Q$ . Dokazati da je prava  $PQ$  paralelna s dijagonalom  $AD$ .

4. Odrediti sve kompleksne brojeve  $z$  za koje važi

$$z^2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}.$$

**Vrijeme rada: 180 minuta.**

**Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.**

**Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.**