

Prirodno-matematički fakultet  
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2019

Takmičenje iz MATEMATIKE  
za IV razred srednje škole

1. Neka je  $ABC$  jednakokraki trougao takav da  $|AC| = |BC|$ . Upisani krug sa centrom u  $I$  dodiruje stranicu  $BC$  u tački  $D$  i stranicu  $AC$  u tački  $E$ . Tačka presjeka  $AD$  i  $BE$  je  $S$ . Tačka presjeka  $AD$  s upisanim krugom je  $P (\neq D)$ .
  - a) Dokazati da su tačke  $C, I$  i  $S$  na istoj pravoj.
  - b) Dokazati da tačke  $P, I, S$  i  $E$  leže na istom krugu.Dokazati da tačke  $P, I, S$  i  $E$  leže na istom krugu.
2. Dat je niz  $(a_n)$  za koji važi  $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$  za  $n \geq 0$ . Koje potpune kvadrate sadrži niz ako je  $a_0 = 2019$ .
3. Neka su  $x$  i  $y$  realni brojevi takvi da  $(x + 1)(y + 2) = 8$ . Dokazati da je  $(xy - 10)^2 \geq 64$  i odrediti sve realne brojeve za koje važi jednakost.
4. Neka je  $\log_{4a}(40\sqrt{3}) = \log_{3a}(45)$ . Dokazati da je  $a^3$  cijeli broj i odrediti ga.

**Vrijeme rada: 180 minuta.**

**Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.**

**Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.**